

弾性体と粘弾性体で構成される複合材料の熱ひずみにおける時間依存性の定式化*

Formulation of Time-Dependent Thermal Strain in Composite Materials which are Composed of Elastic and Viscoelastic Solids

津田 将利 Masatoshi TSUDA
 國立 悦生 Etsuo KOKURYU

In this study, time-dependent behavior of thermal strain in composite materials which composed of elastic and viscoelastic solids is investigated. First, homogenized thermal expansion behavior of a unidirectional continuous CFRP is numerically analyzed using mathematical homogenization method. It is assumed to be orthotropic thermo-elasticity for carbon fiber. On the other hand, isotropic thermo-viscoelasticity based on generalized Maxwell model is assumed for base resin. It is shown to exhibit time-dependent thermal strain because of stress relaxation of base resin in the micro-scale (unit cell) of the CFRP. Second, the behavior of thermal strain is formulated by assuming that thermal strain is additively decomposed into equilibrium and non-equilibrium parts such as stresses in generalized Maxwell model. Non- equilibrium part of thermal strain is assumed to be dominated relaxation time of each Maxwell elements of the base resin. The resulting formulated thermal strain is shown to be perfectly successful for simulating the relaxation behavior of the unidirectional continuous CFRP.

Keywords :

Composite materials, Viscoelasticity, Orthotropy, Thermal strain, Relaxation behavior, Homogenization method

1. 緒言

樹脂基複合材料は、高比強度かつ高比剛性といった優れた特性を有し、炭素繊維強化樹脂（CFRP）は自動車への適用が多く検討されている¹⁾²⁾。

複合材料で構成される構造物の応力解析を行うとき、そのマイクロ構造を全てモデル化すると、その計算負荷は極めて高くなり現実的ではない。これを解決するためには、複合材料を均質体と見做してその均質化特性

を求め、これを精度よく模擬できるマクロ構成式を構築することが必要となる。複合材料において、強化材は弾性体と仮定されるのに対し、母材樹脂は粘弾性体と考えられる。ゆえに強化樹脂は、繊維などの強化材による異方性と母材樹脂の粘弾性を有する、異方性粘弾性体と考えられる。

複合材料の均質化粘弾性特性は、数学的均質化法³⁾⁴⁾（以下、均質化法）などによって検討されている⁵⁾。これに対して Kaliske⁶⁾ は、マクロ構成式として直交異方

性一般化 Maxwell モデルを提案しており、寺田ら⁷⁾はこの直交異方性一般化 Maxwell モデルに対して均質化法に基づく材料パラメータ同定および解析手法の開発を行っている。

複合材料に温度変化を加えると、強化材と母材樹脂の線膨張係数差により、内部に熱応力を生じる。そして、粘弾性体である母材樹脂が応力緩和することで、自由膨張により生じる複合材料としてのマクロ熱ひずみは時間依存性を示す。母材樹脂を弾性体とした場合の均質化線膨張係数は検討されているが⁸⁾、粘弾性に起因する複合材料の熱膨張挙動に焦点を当てた研究事例はほとんどなく、ゆえにマクロ熱ひずみの時間依存性に関しても未だ定式化されていない。

本研究では、弾性体と粘弾性体で構成される一方向強化 CFRP を題材とし、均質化法を用いて、マクロ熱ひずみの時間依存性を解析するとともにこれを定式化した。さらに、異方性粘弾性構成式⁶⁾と組み合わせ、拘束を加えた場合の熱応力を計算することでその妥当性を検証した。

2. 均質化法

マクロ熱ひずみにおける時間依存性の解析に用いた均質化法について説明する。周期的なマイクロ構造を有する複合材料を仮定し、その周期単位であるユニットセル Y を考える。そしてユニットセル内の応力、ひずみおよび変位をそれぞれマイクロ応力、マイクロひずみおよびマイクロ変位と呼び、 $\boldsymbol{\sigma}$ 、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 、 $\mathbf{u}$ で表すことにする。マイクロ構造に働く物体力を無視し、微小変形を仮定する。ユニットセル Y 内の位置ベクトルを $\mathbf{x}$ とすると、マイクロひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ は、

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right\} \quad (1)$$

と表される。ここで、 T は転置を示す。また、マイクロ変位 $\mathbf{u}$ は、マクロひずみ $\mathbf{E}$ を用いて、

$$\mathbf{u} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}^* \quad (2)$$

と表される。ここで、 $\mathbf{u}^*$ は Y -周期性を有する擾乱変位である。式 (2) を式 (1) に代入すると、マイクロひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ はマクロひずみ $\mathbf{E}$ を用いて、

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E} + \boldsymbol{\varepsilon}^* \quad (3)$$

となる。ここで、 $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ は Y -周期性を有する擾乱ひずみであり、

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \right\} \quad (4)$$

である。なお、擾乱ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ の Y -周期性から、

$$\mathbf{E} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \boldsymbol{\varepsilon} \, dV \quad (5)$$

$$\frac{1}{|Y|} \int_Y \boldsymbol{\varepsilon}^* \, dV = \mathbf{0} \quad (6)$$

が成立する。ここで、 $|Y|$ はユニットセルの体積を示す。

一方、マクロ応力 $\boldsymbol{\Sigma}$ はマイクロ応力 $\boldsymbol{\sigma}$ のユニットセル体積平均で定義され、次式のように表される。

$$\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \boldsymbol{\sigma} \, dV \quad (7)$$

なお、擾乱ひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}^*$ の Y -周期性を考慮すると、Hill のマイクロ-マクロ仕事等価式⁹⁾から、次に示すような仮想仕事式が得られる。

$$\boldsymbol{\Sigma} : \delta \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \boldsymbol{\sigma} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \, dV \quad (8)$$

ここで、 $\delta \dot{\mathbf{E}}$ および $\delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ はそれぞれマクロひずみ速度とマイクロひずみ速度の任意の変分であり、 $(\cdot)$ は時間微分を表す。式 (3) を式 (8) に代入し、これを整理すると、次式に示すユニットセル内における応力のつり合い式が得られる。

$$\frac{1}{|Y|} \int_Y \boldsymbol{\sigma} : \delta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \, dV = 0 \quad (9)$$

このように得られた擾乱変位速度場の境界値問題を Y -周期境界条件のもとで、FEM を用いて解くことによりユニットセルの均質化特性を数値的に評価可能である。

*公益社団法人日本材料学会の了承を得て、「材料 Vol. 74, No. 2, pp. 116-123 (2025)」より転載

3. 一方向強化 CFRP の粘弾性均質化解析

3.1 ユニットセル

本研究で検討したのは、炭素繊維 T800SC とエポキシ樹脂で構成される一方向連続繊維強化 CFRP であり、その繊維体積率は V_f は 61 % である。CFRP において炭素繊維は、繊維に垂直な面内に、ランダムに配置される。しかし、繊維配置のランダム性はその均質化挙動には大きな影響を与えない¹⁰⁾。ゆえに本研究では、Fig. 1 に示すように、炭素繊維を六方配置したユニットセルの有限要素モデルを作成し、均質化解析を行った。

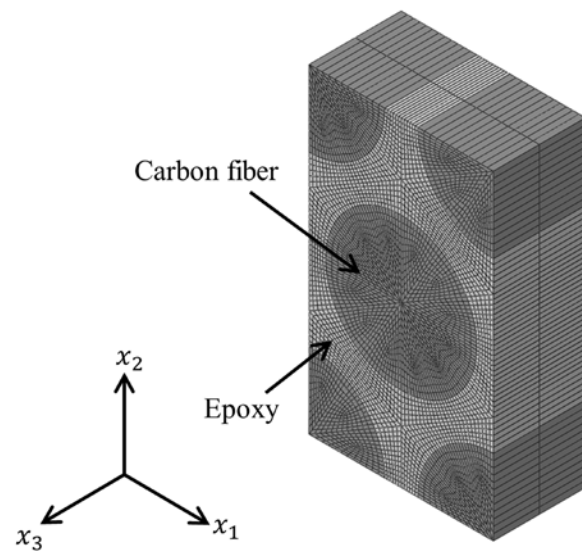


Fig. 1 Finite element model of the unit cell of unidirectional continuous CFRP ($V_f=61\%$)

3.2 ミクロ構成式

3.2.1 炭素繊維

炭素繊維はそのミクロ構造により、繊維の長手方向を異方性主軸とする、横等方性を示すことが知られている。ゆえに、本研究では炭素繊維を直交異方性熱弾性体と仮定した。すなわち、ひずみ ϵ は熱ひずみ ϵ^{th} と力学的ひずみ ϵ^{mech} の和により表される。

$$\epsilon = \epsilon^{th} + \epsilon^{mech} \quad (10)$$

応力 σ と力学的ひずみ ϵ^{mech} の間には、次式に示す Hooke の法則が成立すると仮定した。

$$\sigma = \mathbf{D}^{ortho} : \epsilon^{mech} \quad (11)$$

ここで、 $\mathbf{D}^{ortho}$ は異方性の主軸方向に対するヤング率およびポアソン比、せん断弾性係数によって決定される、4 階の直交異方性弾性剛性テンソルである。

一方、熱ひずみ ϵ^{th} は次式により表されたとした。

$$\epsilon^{th} = \alpha^{ortho}(T - T_0) \quad (12)$$

ここで、 T は温度、 T_0 は初期温度であり、 α^{ortho} は直交異方性線膨張係数テンソルである。

炭素繊維 T800SC は、複合材料の使用される温度域において、弾性物性の温度依存性は微小であるためこれを無視した。Fig. 1 に示したように長手方向を x_3 - 方向とし、弾性物性を $E_1 = E_2 = 6.5$ GPa, $E_3 = 294$ GPa, $\nu_{31} = \nu_{32} = 0.32$, $\nu_{21} = \nu_{12} = 0.41$, $\nu_{13} = \nu_{23} = 0.0071$, $G_{23} = G_{31} = 18.2$ GPa, $G_{12} = 6.5$ GPa, 線膨張係数を $\alpha_1 = \alpha_2 = 5.6$ ppm $^{\circ}\text{C}^{-1}$, $\alpha_3 = -0.56$ ppm $^{\circ}\text{C}^{-1}$ とした¹¹⁾。

3.2.2 母材樹脂

母材樹脂は等方性熱粘弾性体と仮定した。粘弾性構成式は Fig. 2 に示すような、一般化 Maxwell モデルを用いた。また、次式に示すように、応力の偏差成分のみに対して粘性挙動を示すと仮定した。

$$\sigma = p\mathbf{i} + \mathbf{s} \quad (13)$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + \sum_{j=1}^N \mathbf{h}_j \quad (14)$$

$$\mathbf{s}_0 = \mathbf{I}_d : \mathbf{D}_0^{iso} : \epsilon^{mech} \quad (15)$$

$$\dot{\mathbf{h}}_j + \frac{1}{\tau_j} \mathbf{h}_j = g_j \dot{\mathbf{s}}_0 \quad (16)$$

ここで、 p は静水圧応力、 $\mathbf{s}$ は偏差応力、 $\mathbf{i}$ は 2 階の単位テンソル、 $\mathbf{s}_0$ は平衡偏差応力、 $\mathbf{h}_j$ は非平衡偏差応力、 N は Maxwell 要素数であり、右下添字 j は各 Maxwell 要素を表す。また、 $\mathbf{I}_d$ は 4 階のテンソルで表される偏差オペレータ、 $\mathbf{D}_0^{iso}$ は平衡せん断弾性率 G_0 およびポアソン比 ν で表される 4 階の等方性弾性剛性テンソルを表す。さらに、 τ_j は各 Maxwell 要素の緩和時間であり、 $g_j = G_j/G_0$ である。

一方、熱ひずみ ϵ^{th} は次式により表されたとした。

$$\epsilon^{th} = \alpha(T - T_0) \quad (17)$$

ここで、 α は線膨張係数である。

母材樹脂の粘弾性特性を考慮した応力解析には、幅広い周波数域の DMA (Dynamic Mechanical Analysis: 動的粘弾性) データが必要であるが、現実的には限りがある。ゆえに一般的に、異なる温度で測定した貯蔵

弾性率や損失弾性率を、周波数方向に平行移動し、1 つの滑らかな合成曲線 (マスターカーブ) とする時間-温度換算則が適用されている。このとき、周波数方向への移動量を表す係数 α_T をシフトファクター (移動因子) と呼び、マスターカーブを平行移動することで温度依存性が表現される。

本研究では、 $-100 \sim 200$ $^{\circ}\text{C}$ における DMA 測定の結果から、25 $^{\circ}\text{C}$ を基準温度とするマスターカーブを作成した。そして、二宮-Ferry の式¹²⁾により緩和せん断弾性率 G_r を求め、次式に示す Prony 級数によって材料パラメータを決定した。

$$G_r(t) = G_0 \left\{ 1 + \sum_{j=1}^N g_j \exp\left(-\frac{t}{\tau_j}\right) \right\} \quad (18)$$

母材樹脂の温度依存性を表すシフトファクター α_T は、WLF 則¹³⁾を仮定した。すなわち、

$$\log_{10} \alpha_T = -C_1 \frac{T - T_{ref}}{C_2 + T - T_{ref}} \quad (19)$$

ここで、 T_{ref} は基準温度 (25 $^{\circ}\text{C}$)、 C_1 および C_2 は材料パラメータであり、 $C_1 = -13.5$, $C_2 = -399$ とした。

本研究では、Table 1 に示す母材樹脂のポアソン比および粘弾性パラメータを用い、Fig. 3 と Fig. 4 に、それぞれ緩和弾性率とシフトファクターおよびそのフィッティング結果を示す。線膨張係数は、TMA (Thermo-Mechanical Analysis: 熱機械分析) の結果から $\alpha = 50$ ppm $^{\circ}\text{C}^{-1}$ とした。

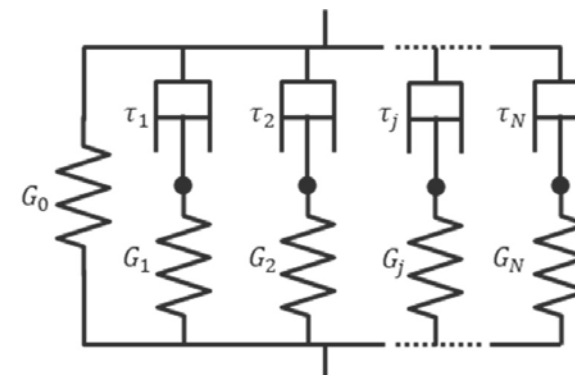


Fig. 2 Schematic illustration of generalized Maxwell model

Table 1 Viscoelastic parameters for base resin at 25 $^{\circ}\text{C}$

ν		G_0 (MPa)
0.35		319
j	τ_j (sec)	G_j (MPa)
1	10^{-6}	450
2	10^{-5}	1200
3	10^{-4}	560
4	10^{-3}	320
5	10^{-2}	180
6	10^{-1}	130
7	10^0	100
8	10^1	80
9	10^2	80
10	10^3	60
11	10^4	120
12	10^5	80
13	10^6	130
14	10^7	130
15	10^8	170
16	10^9	120
17	10^{10}	20

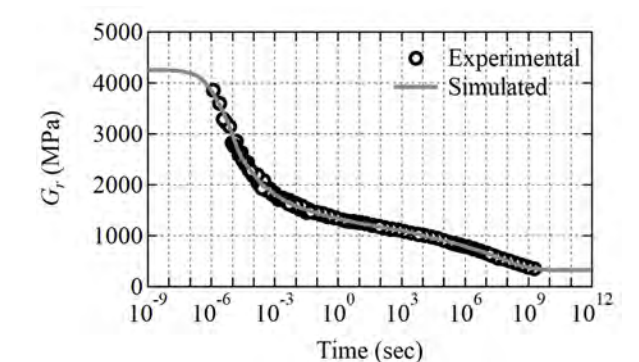


Fig. 3 Relaxation modulus G_r of base resin and fitting result based on generalized Maxwell model

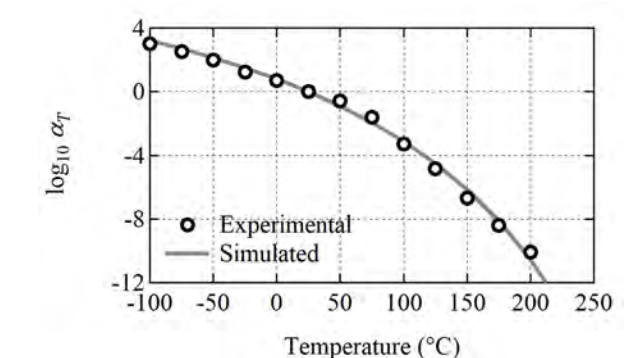


Fig. 4 Shift factor of base resin and fitting result based on WLF model

3.3 粘弾性均質化解析

ミクロスケールの応力緩和によるマクロ熱ひずみの変化を調べるには、母材の緩和時間に対して十分に小さい時間スケールで温度変化を与える必要がある。したがって、初期温度を 25 °C とし、外力を加えることなく 75 °C ならびに 125 °C まで瞬時に加熱して膨張させ、その温度で保持したときのマクロ熱ひずみの変化を解析した。ここで、マクロ熱ひずみは負荷する温度幅によって変化するため、これを温度幅で除したものを緩和均質化線膨張係数と呼び、2 階のテンソル $\mathbf{A}_r^H(t)$ と表すことにする。均質化解析によって得られた、 x_1 - ならびに x_3 - 方向の緩和均質化線膨張係数 $A_{r,11}^H$ 、 $A_{r,33}^H$ をそれぞれ Fig. 5(a), Fig. 5(b) に示す。

Fig. 5(a) に示した $A_{r,11}^H$ は、時間経過とともに増大した。これに対して、Fig. 5(b) に示した $A_{r,33}^H$ は、時間経過とともに減少し、炭素繊維の線膨張係数に漸近した。また、マクロ熱ひずみの変化速度は保持温度により異なり、これは母材樹脂のシフトファクターの影響と考えられる。なお、Fig. 1 に示した CFRP のユニットセルは直交異方性に加えて x_1 - x_2 平面で疑似等方性を有するため、 $\mathbf{A}_r^H(t)$ は対角成分のみを有し $A_{r,11}^H = A_{r,22}^H$ である。

Fig. 6(a), Fig. 6(b) に、125 °C の保持時間 $t=10^{-8}$ 、 10^{16} sec における、ユニットセル内の x_3 - 方向応力分布を示す。炭素繊維よりも母材樹脂の方が大きい線膨張係数を有するため、 $t=10^{-8}$ sec では母材樹脂に圧縮応力が生じている。しかし、 $t=10^{16}$ sec では母材の応力が 0 に近づき、応力緩和していることがわかる。これに対して Fig. 7(a), Fig. 7(b) に、125 °C の保持時間 $t=10^{-8}$ 、 10^{16} sec における、ユニットセル内の x_1 - 方向全ひずみ分布を示す。 $t=10^{-8}$ sec に対して 10^{16} sec におけるひずみは増加している。これは、 x_3 - 方向の圧縮応力が緩和し、母材樹脂のポアソン比により x_1 -, x_2 - 方向に正の力学的ひずみを生じるためと考えられる。

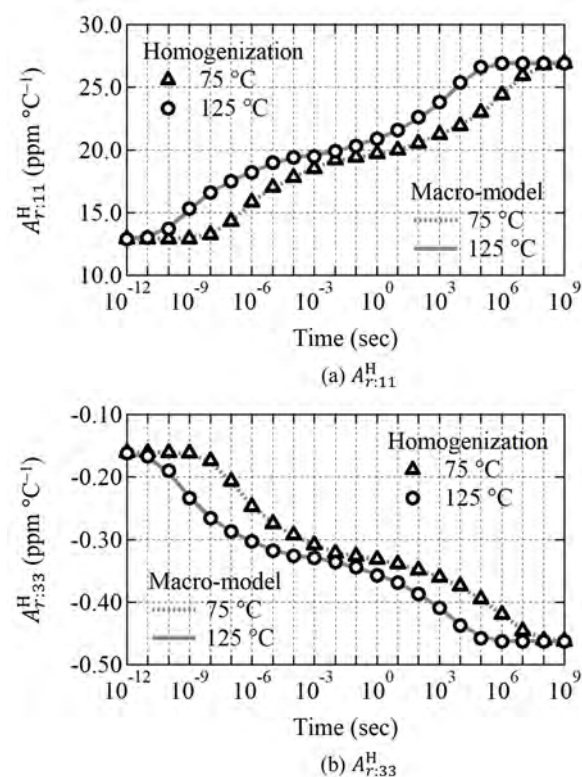


Fig. 5 Components of relaxation homogenized CTE tensor of the unit cell; (a) $A_{r,11}^H$, and (b) $A_{r,33}^H$

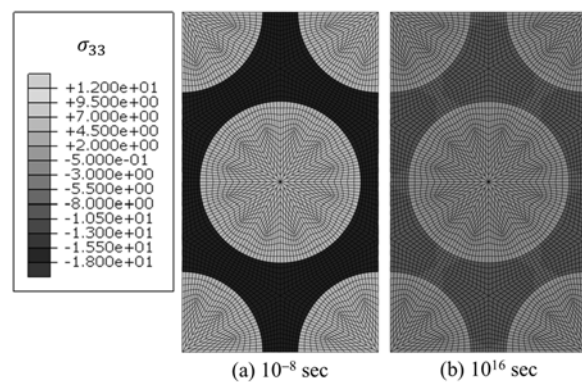


Fig. 6 Contour map of σ_{33} in the unit cell under free thermal expansion from 25 °C to 125 °C and keep for (a) 10^{-8} sec, and (b) 10^{16} sec

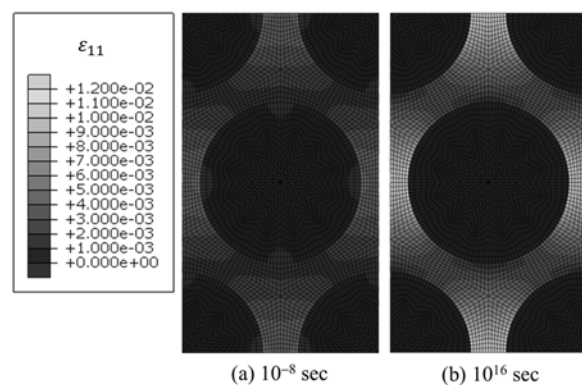


Fig. 7 Contour map of ε_{11} in the unit cell under free thermal expansion from 25 °C to 125 °C and keep for (a) 10^{-8} sec, and (b) 10^{16} sec

4. マクロ熱ひずみの定式化

弾性体である炭素繊維は時間非依存の線形弾性体であるため、マクロ熱ひずみの時間依存性は母材樹脂の粘弾性によって発現する。すなわち、マクロ熱ひずみの時間依存性は、本質的にはユニットセル内部の熱応力の緩和であり、母材樹脂の応力状態により決定される。

前述したように、外力を加えることなく温度負荷のみを与える場合、ユニットセル内の応力のつり合いにより、マクロ応力は生じないがミクロ応力は発生する。一般化 Maxwell モデルに代表される線形粘弾性体は、Boltzmann の重ね合わせの定理により加成性の成立することが知られている。すなわち、外力と熱応力によって母材樹脂に生じるミクロ応力は重ね合わせ可能である。ゆえに、マクロひずみ $\mathbf{E}$ は、次式に示すように、マクロ熱ひずみ $\mathbf{E}^{\text{th}}$ とマクロ力学的ひずみ $\mathbf{E}^{\text{mech}}$ の和により表されると仮定する。

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\text{th}} + \mathbf{E}^{\text{mech}} \quad (20)$$

ここで、マクロ熱ひずみ $\mathbf{E}^{\text{th}}$ はユニットセルを自由膨張させたときに生じるマクロひずみである。したがって、Fig. 6(a), Fig. 6(b) に示したように、自由膨張させた場合であってもユニットセル内部のミクロ応力は 0 とはならない。

マクロ熱ひずみの時間依存性は、母材樹脂に生じた熱応力の緩和により生じるため、母材樹脂の緩和時間やシフトファクターに支配される。したがってマクロ熱ひずみは、式 (14)-(16) に示した一般化 Maxwell モデルと同様に、平衡部と非平衡部により表現されるとした。すなわち、弾性問題では温度変化と線形関係にあるマクロ熱ひずみに、粘性要素に相当する、速度依存性を加えることで次式のように定式化した。

$$\mathbf{E}^{\text{th}} = \mathbf{E}_0^{\text{th}} + \sum_{j=1}^N \mathbf{K}_j^{\text{th}} \quad (21)$$

$$\mathbf{E}_0^{\text{th}} = \mathbf{A}_0^H (T - T_0) \quad (22)$$

$$\dot{\mathbf{K}}_j^{\text{th}} + \frac{1}{\tau_j} \mathbf{K}_j^{\text{th}} = \mathbf{P}_j \cdot \dot{\mathbf{E}}_0^{\text{th}} \quad (23)$$

これにより、マクロ熱ひずみにおいても、線形粘弾性構成式と同様に、重ね合わせの定理が成立する。ここで、

マクロ熱ひずみの変化は母材の応力緩和により生じるため、 τ_j は Table 1 に示した母材樹脂の緩和時間とした。ここで、 $\mathbf{E}_0^{\text{th}}$ は平衡マクロ熱ひずみ、 $\mathbf{A}_0^H$ は応力緩和が完了した状態における均質化線膨張係数であり、平衡均質化線膨張係数テンソルである。また、 $\mathbf{K}_j^{\text{th}}$ ならびに $\mathbf{A}_j^H$ は各 Maxwell 要素の緩和時間に対応する非平衡マクロ熱ひずみと非平衡均質化線膨張係数テンソルであり、 $\mathbf{P}_j$ は、

$$\mathbf{P}_j = \mathbf{A}_j^H \cdot (\mathbf{A}_0^H)^{-1} \quad (24)$$

である。このとき、緩和均質化線膨張係数 $\mathbf{A}_r^H(t)$ は、次式によって表される。

$$\mathbf{A}_r^H(t) = \left\{ \mathbf{I} + \sum_{j=1}^N \mathbf{P}_j \exp\left(-\frac{t}{\tau_j}\right) \right\} \cdot \mathbf{A}_0^H \quad (25)$$

以下では、均質化法との比較において、定式化したマクロ熱ひずみをマクロモデルと呼ぶことにする。

5. 均質化解析との比較による検証

構築したマクロモデルを CFRP に適用し、均質化解析の結果と比較することにより、妥当性を検証する。マクロ熱ひずみは、汎用有限要素解析ソフト Abaqus を用いて解析し、熱ひずみの増分を定義するユーザサブルーチン UEXPAN を用いて実装した。

5.1 拘束がない場合のマクロ熱ひずみ

マクロモデルでは、材料パラメータとして基準温度である 25 °C における $\mathbf{A}_0^H$ ならびに $\mathbf{A}_j^H$ を決定する必要がある。これらの材料パラメータは、自由膨張均質化解析によって得られる $\mathbf{A}_r^H(t)$ から決定できる。しかし、自由膨張均質化解析は温度変化を伴うため、マクロ熱ひずみの時間依存性はシフトファクターの影響を受ける。本研究では、シフトファクターの影響を無視するため、便宜的に $\alpha_T = 1$ に固定し、自由膨張均質化解析を行うことで $\mathbf{A}_0^H$ ならびに $\mathbf{A}_j^H$ を決定した。Table 2 に $\mathbf{A}_0^H$ ならびに $\mathbf{A}_j^H$ の x_1 -, x_3 - 方向成分 $A_{0,11}^H$, $A_{j,11}^H$ と $A_{0,33}^H$, $A_{j,33}^H$ を示す。また、Fig. 5(a), Fig. 5(b) 中に、マクロモデルによって計算したマクロ熱ひずみの変化を示す。マクロモデルは、いずれも均質化解析の結果をほとんど誤差なく再現できた。

続いて、マクロ熱ひずみが安定した後、再び 25 °C まで冷却して 10¹⁶ sec 温度保持した時の、マクロ熱ひずみの変化を計算した。マクロモデルと均質化法による計算結果を、Fig. 8(a), Fig. 8(b) に示す。冷却直後はいずれもマクロ熱ひずみは 0 に戻らず、時間経過に伴う母材樹脂の応力緩和によってマクロ熱ひずみが 0 に漸近していく様子がうまく再現された。また、加熱時と異なりいずれも 25 °C で保持しているため、シフトファクターの影響が見られない点も再現された。

Table 2 Relaxation homogenized CTE of the unit cell at 25 °C (unit in ppm°C⁻¹)

	$A_{0:11}^H$	$A_{0:33}^H$
	26.9	-0.463
j	$A_{j:11}^H$	$A_{j:33}^H$
1	-0.500	0.020
2	-1.400	0.042
3	-1.500	0.036
4	-1.000	0.024
5	-0.800	0.016
6	-0.700	0.016
7	-0.500	0.009
8	-0.200	0.004
9	-0.200	0.005
10	-0.500	0.009
11	-0.500	0.010
12	-0.700	0.012
13	-0.800	0.017
14	-1.000	0.020
15	-1.800	0.029
16	-1.400	0.023
17	-0.500	0.010

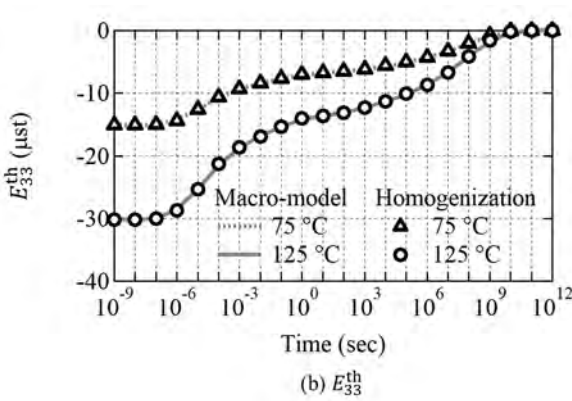
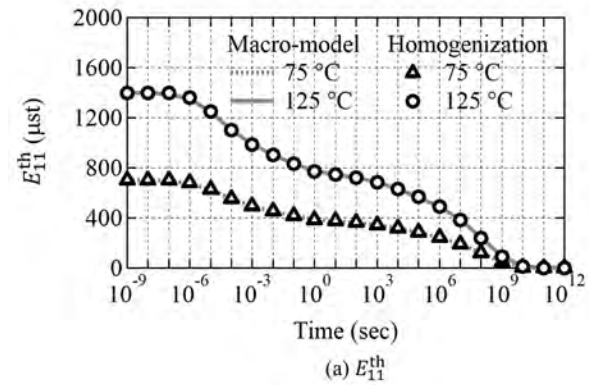


Fig. 8 Variation of thermal macro-strain of the unit cell under free thermal shrinkage after saturation of thermal macro-strain at high temperatures; (a) E_{11}^{th} , and (b) E_{33}^{th}

5.2 拘束を加えた場合のマクロ熱応力

5.2.1 マクロ力学的ひずみに対するマクロ構成式

拘束を加えた状態で温度変化を与えると、マクロ力学的ひずみが発生する。したがって、マクロ力学的ひずみに対する応答を記述するマクロ構成式が必要となる。

Fig. 1 に示したユニットセルの直交異方性粘弾性特性を表現するマクロ構成式は、式 (13)-(16) に示した等方性の一般化 Maxwell モデルを直交異方性に拡張することにより、次式のように表される⁶⁾。

$$\Sigma_0 = \mathbf{D}_0^{\text{eH}} : \mathbf{E}^{\text{mech}} \tag{26}$$

$$\Sigma = \Sigma_0 + \sum_{j=1}^N \mathbf{H}_j \tag{27}$$

$$\dot{\mathbf{H}}_j + \frac{1}{\tau_j} \mathbf{H}_j = \mathbf{F}_j : \dot{\Sigma}_0 \tag{28}$$

ここで、 τ_j は母材樹脂の緩和時間、 Σ_0 は平衡マクロ応力、 $\mathbf{D}_0^{\text{eH}}$ は 4 階の平衡均質化弾性剛性テンソル、 $\mathbf{H}_j$ は非平衡マクロ応力であり、 $\mathbf{F}_j = \mathbf{D}_j^{\text{eH}} : (\mathbf{D}_0^{\text{eH}})^{-1}$ である。このとき、緩和均質化弾性剛性テンソル $\mathbf{D}_r^{\text{eH}}(t)$ は、

$$\mathbf{D}_r^{\text{eH}}(t) = \left\{ \mathbf{I} + \sum_{j=1}^N \mathbf{F}_j \exp\left(-\frac{t}{\tau_j}\right) \right\} : \mathbf{D}_0^{\text{eH}} \tag{29}$$

と表される。ここで、 $\mathbf{I}$ は 4 階の単位テンソルである。寺田ら⁷⁾は、ユニットセルに対してマクロひずみを 1 成分ずつ加え、マクロ応力の時間変化を均質化法により解析することで、 $\mathbf{D}_r^{\text{eH}}(t)$ の成分を同定している。本研

究では、寺田らの手法に従い計算した $\mathbf{D}_r^{\text{eH}}(t)$ にフィッティングすることで、材料パラメータを決定した。ユニットセルの疑似等方性から、緩和均質化弾性剛性テンソルを構成する弾性係数の独立した成分は、 $D_{r:1111}^{\text{eH}}$ 、 $D_{r:3333}^{\text{eH}}$ 、 $D_{r:2211}^{\text{eH}}$ 、 $D_{r:3311}^{\text{eH}}$ 、 $D_{r:1212}^{\text{eH}}$ および $D_{r:2323}^{\text{eH}}$ となる。この内、熱応力解析をするときに、垂直応力の計算に係る成分は $D_{r:1111}^{\text{eH}}$ 、 $D_{r:3333}^{\text{eH}}$ 、 $D_{r:2211}^{\text{eH}}$ および $D_{r:3311}^{\text{eH}}$ であり、これらを Fig. 9(a), Fig. 9(b), Fig. 9(c) に示すとともに、材料パラメータを Table 3 に示す。いずれの成分も、均質化解析の結果をほとんど誤差なく表すことができた。直交異方性粘弾性構成式は、Abaqus における材料の機械的挙動を定義するユーザサブルーチン UMAT により実装しこれを用いて解析した。

Table 3 Relaxation homogenized elastic moduli of the unit cell at 25 °C (unit in MPa)

	$D_{0:1111}^{\text{eH}}$	$D_{0:2211}^{\text{eH}}$	$D_{0:3311}^{\text{eH}}$	$D_{0:3333}^{\text{eH}}$
	3041	1306	1439	180513
j	$D_{j:1111}^{\text{eH}}$	$D_{j:2211}^{\text{eH}}$	$D_{j:3311}^{\text{eH}}$	$D_{j:3333}^{\text{eH}}$
1	189	-5.1	-92.1	198
2	605	-39.3	-237.1	528
3	514	-75.3	-96.7	250
4	239	-32.1	-58.1	141
5	213	-37.2	-27.7	80
6	206	-34.3	-35.9	95
7	136	-26.5	-15.0	46
8	0	0.0	0.0	0
9	94	-17.3	-12.7	36
10	82	-16.5	-8.6	27
11	154	-30.2	-17.8	54
12	124	-27.5	-10.9	37
13	194	-41.2	-18.3	60
14	232	-55.9	-16.3	60
15	318	-79.2	-20.0	77
16	292	-89.5	-10.9	55
17	54	-18.1	-2.0	10

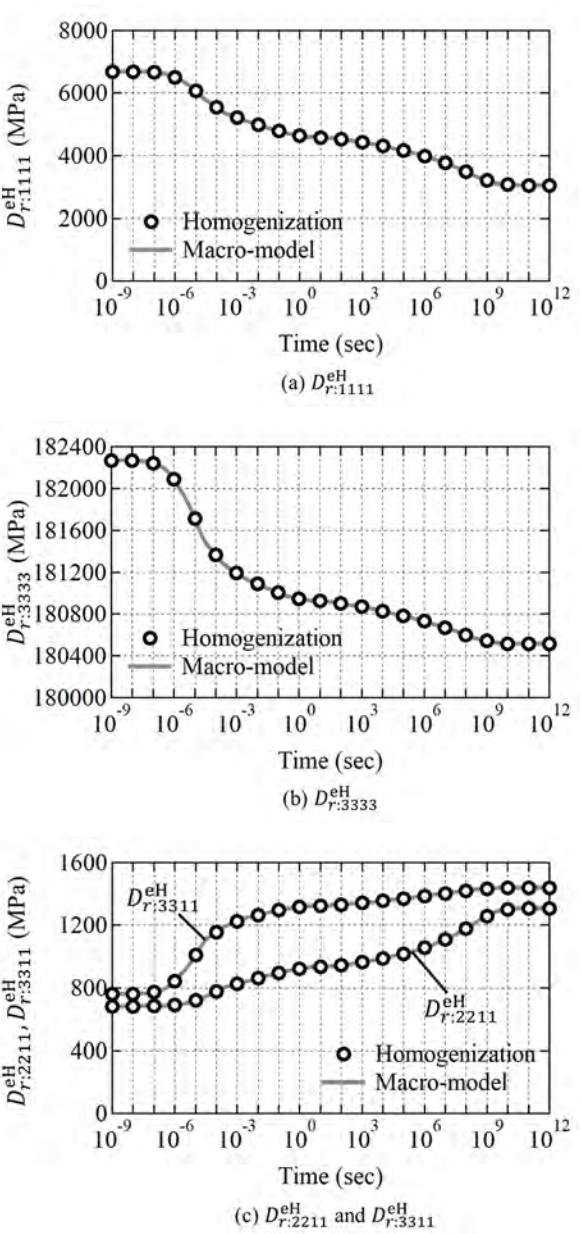


Fig. 9 Components of relaxation homogenized elastic stiffness tensor of the unit cell; (a) $D_{r:1111}^{\text{eH}}$, (b) $D_{r:3333}^{\text{eH}}$, and (c) $D_{r:2211}^{\text{eH}}$ and $D_{r:3311}^{\text{eH}}$

5.2.2 マクロ熱応力の解析結果

まず、マクロひずみを $E_{11}=0$ に拘束し、25 °C から 125 °C まで瞬時に加熱膨張させ、温度を保持したときの、 Σ_{11} 、 E_{22} ならびに E_{33} の変化を均質化法によって計算した。得られた結果を Fig. 10(a), Fig. 10(b) に示す。Fig. 10(a) に示した Σ_{11} は、 E_{11} の拘束により圧縮状態となり、時間経過により最終的に -6.7 MPa となった。これに対して、Fig. 10(b) に示した E_{22} ならびに E_{33} は、Fig. 5(a), Fig. 5(b) に示した緩和均質化線膨張係数と同様の傾向となった。すなわち、時間経過によって、

剛性が高く線膨張係数が負である炭素繊維の長手方向マクロひずみ E_{33} は減少し、一方で E_{22} は増加した。

続いて、同様にマクロひずみを $E_{11}=E_{33}=0$ とした場合の Σ_{11} 、 Σ_{33} および E_{22} を計算した。得られた結果を Fig. 11(a)、Fig. 11(b) に示す。Fig. 11(a) において Σ_{11} は、 E_{11} の拘束によって圧縮マクロ応力を示した。この一方で、 x_3 -方向の線膨張係数が負値であることから、 E_{33} の拘束によって Σ_{33} は引張を示し、時間経過によって最終的に 6.1 MPa となった。一方、Fig. 11(b) に示した E_{22} は、Fig. 10(b) に示した E_{11} のみの拘束の場合とほとんど同じ値を示した。

これに対して、マクロモデルに加えて、前節で述べたマクロ構成式を適用し、上述の拘束条件におけるマクロ熱応力を解析した。得られた結果を、Fig. 10(a)、Fig. 10(b) ならびに Fig. 11(a)、Fig. 11(b) 中に示す。Fig. 10(a)、Fig. 10(b) ならびに Fig. 11(a)、Fig. 11(b) において、マクロ応力およびマクロひずみは、均質化法による解析結果とほとんど誤差なく一致した。これにより、本研究で定式化したマクロモデルの妥当性が示された。

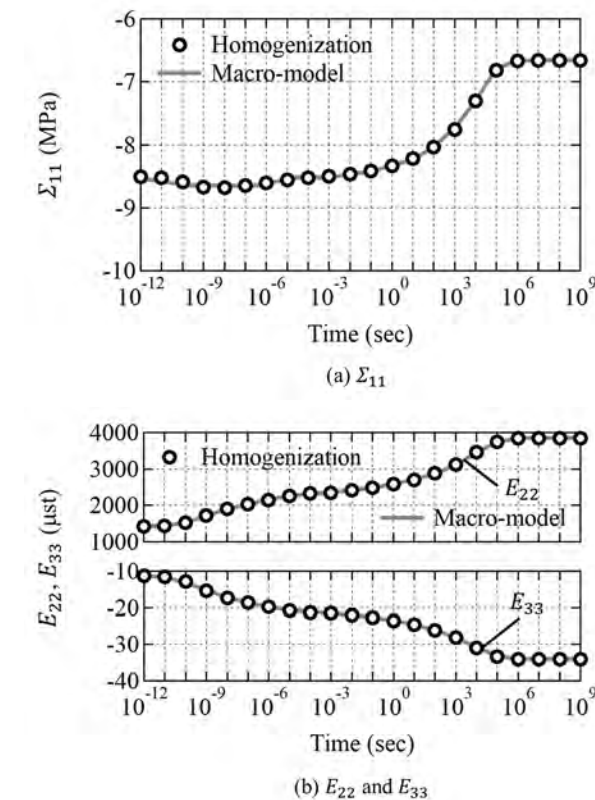


Fig. 10 Variation of macro-stress and macro-strain components of the unit cell under thermal expansion with constraint of $E_{11}=0$; (a) Σ_{11} , and (b) E_{22} and E_{33}

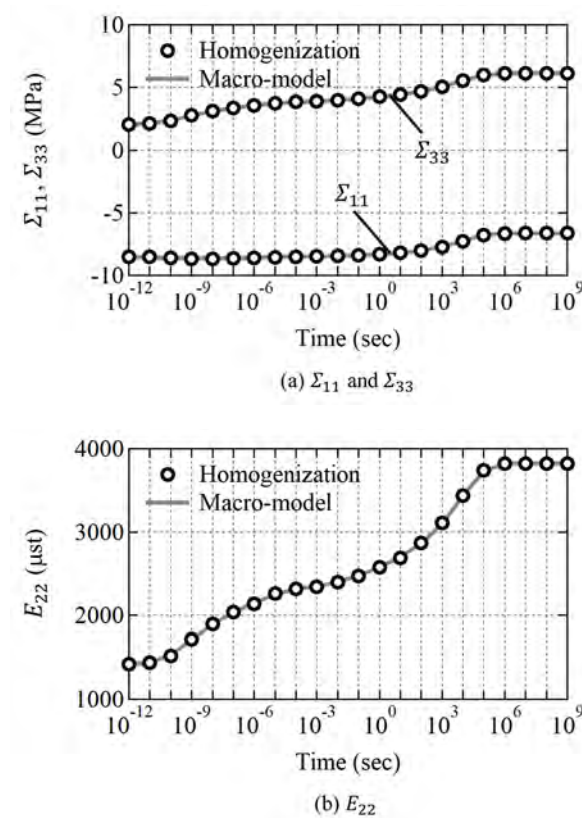


Fig. 11 Variation of macro-stress and macro-strain components of the unit cell under thermal expansion with constraint of $E_{11}=E_{33}=0$; (a) Σ_{11} and Σ_{33} , and (b) E_{22}

6. 結言

本研究では、CFRP のような、弾性体と粘弾性体で構成される複合材料における熱ひずみの時間依存性を定式化した。得られた知見を下に示す。

- (1) Boltzmann の重ね合わせの定理から、外力と熱応力によって母材樹脂に生じるミクロ応力は重ね合わせ可能であり、マクロひずみはマクロ熱ひずみとマクロ力学的ひずみの和によって表されると仮定した。
- (2) マクロ熱ひずみの時間依存性は、母材樹脂の緩和時間やシフトファクターに支配される。よって、弾性問題では温度変化と線形関係にあるマクロ熱ひずみに、粘性要素に相当する、速度依存性を加えることでマクロ熱ひずみを定式化した。この結果、マクロ熱ひずみにおいても重ね合わせの定理が成立し、CFRP を自由膨張・収縮させたときのマクロ熱ひずみにおける時間依存性を精度よく再

現することができた。

- (3) マクロ力学的ひずみに対して異方性粘弾性構成式を適用することで、拘束を受ける場合のマクロ熱応力に関しても、マクロ応力およびマクロひずみの時間依存性が非常に精度よく再現された。

付録 A. マクロ熱ひずみの実装

本報の計算は、汎用有限要素解析ソフト Abaqus における、熱ひずみの増分を定義するサブルーチン UEXPAN を用いた。UEXPAN では、時刻 t_n から t_{n+1} に変化した時のマクロ熱ひずみ増分 $\Delta \mathbf{E}_{n+1}^{\text{th}}$ ならびに温度に関するマクロ熱ひずみの変化率 $\partial \Delta \mathbf{E}_{n+1}^{\text{th}} / \partial \Delta T_{n+1}$ を計算する必要がある。ここでは、UEXPAN 実装に用いた計算アルゴリズムを説明する。以下では、添字 n と $n+1$ により時刻 t_n 、 t_{n+1} の値を示し、 Δ により t_n から t_{n+1} への増分を表すこととする。

まず式 (22) から、平衡マクロ熱ひずみ増分 $\Delta \mathbf{E}_{0:n+1}^{\text{th}}$ は、

$$\Delta \mathbf{E}_{0:n+1}^{\text{th}} = \mathbf{A}_0^{\text{H}} \Delta T_{n+1} \quad (\text{A1})$$

となる。同様に、式 (21) を離散化することによって、マクロ熱ひずみ増分 $\Delta \mathbf{E}_{n+1}^{\text{th}}$ は次式のように表される。

$$\Delta \mathbf{E}_{n+1}^{\text{th}} = \Delta \mathbf{E}_{0:n+1}^{\text{th}} + \sum_{j=1}^N \Delta \mathbf{K}_{j:n+1}^{\text{th}} \quad (\text{A2})$$

ここで、時刻 t における非平衡マクロ熱ひずみ $\mathbf{K}_j^{\text{th}}(t)$ は、式 (23) の解として、次式に示す畳み込み積分で表される。

$$\mathbf{K}_j^{\text{th}}(t) = \int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_j}\right) \mathbf{P}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_0^{\text{th}}}{\partial s} ds \quad (\text{A3})$$

ここで、式 (A3) は次式に示すような t_n と t_{n+1} の漸化式で近似することができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{j:n+1}^{\text{th}} &= \mathbf{K}_{j:n}^{\text{th}} + \Delta \mathbf{K}_{j:n+1}^{\text{th}} \approx \mathbf{K}_{j:n}^{\text{th}} \exp\left(-\frac{\Delta t_{n+1}}{\tau_j}\right) \\ &+ \frac{1 - \exp(-\Delta t_{n+1}/\tau_j)}{\Delta t_{n+1}/\tau_j} \mathbf{P}_j \cdot \Delta \mathbf{E}_{0:n+1}^{\text{th}} \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

さらに、式 (A4) から $\Delta \mathbf{K}_{j:n+1}^{\text{th}}$ を計算し、(A1) とともにこれを式 (A2) に代入することにより、マクロ熱ひずみ増分 $\Delta \mathbf{E}_{n+1}^{\text{th}}$ は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E}_{n+1}^{\text{th}} &= \mathbf{A}_0^{\text{H}} \Delta T_{n+1} + \sum_{j=1}^N \left[\left\{ \exp\left(-\frac{\Delta t_{n+1}}{\tau_j}\right) - 1 \right\} \mathbf{K}_{j:n}^{\text{th}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 - \exp(-\Delta t_{n+1}/\tau_j)}{\Delta t_{n+1}/\tau_j} \mathbf{P}_j \cdot \mathbf{A}_0^{\text{H}} \Delta T_{n+1} \right] \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

マクロ熱ひずみの変化率 $\Delta \mathbf{E}_{n+1}^{\text{th}} / \partial \Delta T_{n+1}$ に関して、式 (A2) を微分することにより、次式が得られる。

$$d\Delta \mathbf{E}_{n+1}^{\text{th}} = d\Delta \mathbf{E}_{0:n+1}^{\text{th}} + \sum_{j=1}^N d\Delta \mathbf{K}_{j:n+1}^{\text{th}} \quad (\text{A6})$$

式 (A6) の右辺第 1 項および第 2 項は、それぞれ式 (A1) および式 (A4) を微分することにより、

$$d\Delta \mathbf{E}_{0:n+1}^{\text{th}} = \mathbf{A}_0^{\text{H}} d\Delta T_{n+1} \quad (\text{A7})$$

$$d\Delta \mathbf{K}_{j:n+1}^{\text{th}} = \frac{1 - \exp(-\Delta t_{n+1}/\tau_j)}{\Delta t_{n+1}/\tau_j} \mathbf{P}_j \cdot \mathbf{A}_0^{\text{H}} d\Delta T_{n+1} \quad (\text{A8})$$

となる。これより、 $\Delta \mathbf{E}_{n+1}^{\text{th}} / \partial \Delta T_{n+1}$ は次式のようにになる。

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{E}_{n+1}^{\text{th}}}{\partial \Delta T_{n+1}} = \left\{ \mathbf{I} + \sum_{j=1}^N \frac{1 - \exp(-\Delta t_{n+1}/\tau_j)}{\Delta t_{n+1}/\tau_j} \mathbf{P}_j \right\} \cdot \mathbf{A}_0^{\text{H}} \quad (\text{A9})$$

付録 B. 直交異方性粘弾性構成式の実装

直交異方性粘弾性構成式の実装は、Abaqus における材料の機械的挙動を定義するサブルーチン UMAT を用いて行った。UMAT では、時刻 t_n から t_{n+1} への変化に対し、マクロ力学的ひずみ増分 $\partial \Delta \mathbf{E}_{n+1}^{\text{mech}}$ が与えられたときの、マクロ応力 Σ_{n+1} およびコンシステント接線剛性 $\partial \Sigma_{n+1} / \partial \Delta \mathbf{E}_{n+1}^{\text{mech}}$ を計算する必要がある。ここでは、UMAT への実装に用いた計算アルゴリズム⁶⁾を説明する。

まず式 (26)、(27) を離散化すると次式が得られる。

$$\Delta \Sigma_{0:n+1} = \mathbf{D}_0^{\text{eH}} : \Delta \mathbf{E}_{n+1}^{\text{mech}} \quad (\text{B1})$$

$$\Sigma_{n+1} = \Sigma_n + \Delta \Sigma_{0:n+1} + \sum_{j=1}^N \Delta \mathbf{H}_{j:n+1} \quad (\text{B2})$$

ここで、時刻 t における非平衡マクロ応力 $\mathbf{H}_j(t)$ は、式 (28) の解として、次式に示す畳み込み積分で表される。

$$\mathbf{H}_j(t) = \int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{\tau_j}\right) \mathbf{F}_j : \frac{\partial \Sigma_0}{\partial s} ds \quad (\text{B3})$$

ここで、式 (B3) は次式に示すような t_n と t_{n+1} の漸化式

で近似することができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{j:n+1} &= \mathbf{H}_{j:n} + \Delta \mathbf{H}_{j:n+1} \approx \mathbf{H}_{j:n} \exp\left(-\frac{\Delta t_{n+1}}{\tau_j}\right) \\ &+ \frac{1 - \exp(-\Delta t_{n+1}/\tau_j)}{\Delta t_{n+1}/\tau_j} \mathbf{F}_j : \Delta \boldsymbol{\Sigma}_{0:n+1} \end{aligned} \tag{B4}$$

さらに、式 (B4) から $\Delta \mathbf{H}_{j:n+1}$ を計算し、(B1) とともに式 (B2) に代入すると、マクロ応力 $\boldsymbol{\Sigma}_{n+1}$ は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}_{n+1} &= \boldsymbol{\Sigma}_n + \mathbf{D}_0^{\text{eH}} : \Delta \mathbf{E}_{n+1}^{\text{mech}} + \sum_{j=1}^N \left[\left\{ \exp\left(-\frac{\Delta t_{n+1}}{\tau_j}\right) - 1 \right\} \right. \\ &\quad \times \left. \mathbf{H}_{j:n} + \frac{1 - \exp(-\Delta t_{n+1}/\tau_j)}{\Delta t_{n+1}/\tau_j} \mathbf{F}_j : \mathbf{D}_0^{\text{eH}} : \Delta \mathbf{E}_{n+1}^{\text{mech}} \right] \end{aligned} \tag{B5}$$

コンシステント接線剛性 $\partial \boldsymbol{\Sigma}_{n+1} / \partial \Delta \mathbf{E}_{n+1}^{\text{mech}}$ に関して、式 (B2) を微分することにより、次式が得られる。

$$d\boldsymbol{\Sigma}_{n+1} = d\boldsymbol{\Sigma}_{0:n+1} + \sum_{j=1}^N d\Delta \mathbf{H}_{j:n+1} \tag{B6}$$

式 (B6) の右辺第 1 項および第 2 項は、それぞれ式 (B1) および式 (B4) を微分することにより、

$$d\boldsymbol{\Sigma}_{0:n+1} = \mathbf{D}_0^{\text{eH}} : d\Delta \mathbf{E}_{n+1}^{\text{mech}} \tag{B7}$$

$$d\Delta \mathbf{H}_{j:n+1} = \frac{1 - \exp(-\Delta t_{n+1}/\tau_j)}{\Delta t_{n+1}/\tau_j} \mathbf{F}_j : \mathbf{D}_0^{\text{eH}} : d\Delta \mathbf{E}_{n+1}^{\text{mech}} \tag{B8}$$

となる。これより、 $\partial \boldsymbol{\Sigma}_{n+1} / \partial \Delta \mathbf{E}_{n+1}^{\text{mech}}$ は次式のようになる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_{n+1}}{\partial \Delta \mathbf{E}_{n+1}^{\text{mech}}} = \left\{ \mathbf{I} + \sum_{j=1}^N \frac{1 - \exp(-\Delta t_{n+1}/\tau_j)}{\Delta t_{n+1}/\tau_j} \mathbf{F}_j \right\} : \mathbf{D}_0^{\text{eH}} \tag{B9}$$

参考文献

1) Ishikawa T. Overview of carbon fiber reinforced composites (CFRP) applications to automotive structural parts, -Focused on thermoplastic CFRP. Journal of the Japan Society for Precision Engineering 2015;81:489-493.

2) Kim HS, Ben G, Aoki Y. Experimental and FEM analysis of rectangular CFRP tubes for front side members of automobiles under impact load. Journal of the Japan Society for Composite Materials 2008;34:51-59.

3) Bensoussan A, Lions JL, Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. 1978, North Holland, Amsterdam-New York-Oxford.

4) Sancez-Palencia E. Non-homogeneous media and vibration theory. 1980, Lecture Notes in Physics 127, Springer Verlag, Berlin.

5) Arai M, Kaku K, Fushimi Y, Matsuda T. Evaluation for

viscoelastic constitutive equation of CFRP laminates using homogenization method. Transaction of the Japan Society for Computational Methods in Engineering 2008;8:10-081128.

6) Kaliske M. A formulation of elasticity and viscoelasticity for fibre reinforced material at small and finite strains. Computer methods in applied mechanics and engineering 2000;185:225-243.

7) Terada K, Hamana Y, Hirayama N. A method of viscoelastic two-scale analyses for FRP. Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series A 2009;75:1674-1683.

8) Koishi M, Kabe K, Shiratori M. Analysis of effective properties of composite materials using homogenization method based on general-purpose FEM code. Materials System 1996;15:57-63.

9) Hill R. The essential structure of constitutive laws for metal composites and polycrystals. Journal of Mechanics and Physics of Solids 1967;15:79-95.

10) Matsuda T, Ohno N, Tanaka H, Shimizu T. Effect of fiber distribution on elastic-viscoplastic behavior of long fiber-reinforced laminates. International Journal of Mechanical Sciences 2003;45:1583-1598.

11) Yudhanto A. Mechanical characteristics and damage mechanisms of stitched carbon/epoxy composites under static and fatigue loads. 2013, Doctoral thesis, Tokyo metropolitan university.

12) Ninomiya K, Ferry JD. Some approximate equations useful in the phenomenological treatment of linear viscoelastic data. Journal of Colloid Science 1959;14:36-48.

13) Williams ML, Landel RE, Ferry JD. The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-gorming liquids. Journal of American Chemical Society 1955;77:3701-3707.

著者



津田 将利
つだ まさとし

材料技術部 博士（工学）
製品強度保証の技術開発に従事



國立 悦生
こくりゅう えつお

材料技術部
製品強度保証の技術開発に従事